25/4/20

<u>Θεώρημα</u> ① Έστω $\vec{F} = M\hat{i} + N\hat{j} + P\hat{k}$ ένα διανυσματικό πεδίο με συνεχείς συνιστώσες σε ένα ανοιχτό χωρίο D. Υπάρχει μια διαφορίσιμη συνάρτηση f τέτοια ώστε:

$$\vec{F} = \vec{\nabla} f = \frac{df}{dx}\hat{i} + \frac{df}{dy}\hat{j} + \frac{df}{dz}\hat{k}$$

αν και μόνο αν για όλα τα σημεία A, B του D το $\int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r}$ <u>δεν</u> εξαρτάται από τη διαδρομή που ακολουθούμε για να μεταβούμε από το A στο B.

② Αν είναι ανεξάρτητο της διαδρομής
$$\int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r} = f(B) - f(A)$$

<u>Απόδειξη</u>: Γνωρίζουμε ότι $\vec{F} = \vec{\nabla} f = \frac{df}{dx}\hat{i} + \frac{df}{dy}\hat{j} + \frac{df}{dz}\hat{k}$

και έστω ότι ακολουθούμε τη καμπύλη $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$

Δηλαδή
$$\vec{F}\, d\vec{r} = \vec{\nabla} f\,(dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k}) = \frac{df}{dx}dx + \frac{df}{dy}dy + \frac{df}{dz}dz =$$
$$= df$$

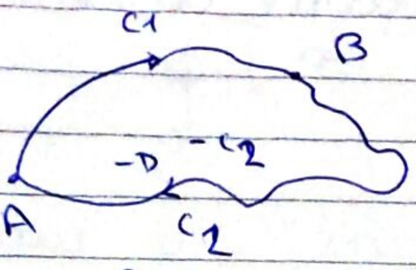
Τελικά $$w = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_A^B df = f(B) - f(A)$$

Άμεση συνέπεια είναι το εξής:

Θεώρημα: Για ένα κλειστό βρόχο/διαδρομή C

$$\oint \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0 \Leftrightarrow \vec{F} \text{ συντηρητικό}$$

Απόδειξη: α) Γνωρίζουμε ότι $\oint \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0$. Έστω 2 τυχαία σημεία A και B στο χώρο και 2 διαδρομές όπως φαίνεται στο σχήμα:



Γνωρίζουμε ότι:

$$\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{C_1} \vec{F} d\vec{r} + \int_{C_2} \vec{F} d\vec{r} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_{C_1} \vec{F}\cdot d\vec{r} = -\int_{C_2} \vec{F} d\vec{r}$$, δηλαδή ανεξαρτησία διαδρομής

Άρα το $\vec{F}$ συντηρητικό πεδίο

β) Αν το $\vec{F}$ είναι συντηρητικό:

$$\int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r} = f(B) - f(A)$$

Δηλαδή από το σχήμα

$$\oint \vec{F} d\vec{r} = \int_{C_1} \vec{F} d\vec{r} + \int_{C_1} \vec{F}\cdot d\vec{r} = f(B) - f(A) + f(A) - f(B) = 0$$

Συνολικά $\vec{F} = \vec{\nabla} f \Leftrightarrow \vec{F}$ συντηρητικό $\Leftrightarrow \oint_C \vec{F} d\vec{r} = 0$

Εύρεση του Δυναμικού

Είναι προφανές πως αν γνωρίζουμε τη συνάρτηση δυναμικού f άμεσα βρίσκουμε το πεδίο $\vec{F}$, δηλαδή

$$\vec{F} = \vec{\nabla} f = \frac{df}{dx}\hat{i} + \frac{df}{dy}\hat{j} + \frac{df}{dz}\hat{k}$$

Γνωρίζοντας το $\vec{F}$ μπορούμε να βρούμε το πεδίο f?

Θεώρημα: Για ένα διανυσματικό πεδίο $\vec{F} = M\hat{i} + N\hat{j} + P\hat{k}$ υπάρχει συνάρτηση f διαφορίσιμη ώστε $\vec{F} = \vec{\nabla} f$ αν και μόνο αν $M dx + N dy + P dz = df$ (τέλειο διαφορικό ή ακριβής μορφή)

Παρατήρηση: Ισοδύναμα μπορούμε να δείξουμε ότι:

$$\frac{dP}{dy} = \frac{dN}{dz}, \quad \frac{dM}{dz} = \frac{dP}{dx}, \quad \frac{dN}{dx} = \frac{dM}{dy}$$

Απόδειξη: Αν υπάρχει το πεδίο f έχουμε

$$M dx + N dy + P dz = \frac{df}{dx}dx + \frac{df}{dy}dy + \frac{df}{dz}dz = df$$

Δηλαδή, $\frac{df}{dx} = M$ ή $\frac{d^2 f}{dy\,dx} = \frac{dM}{dy}$

Επίσης $\frac{df}{dy} = N$ ή $\frac{d^2 f}{dx\,dy} = \frac{dN}{dx}$. Εξαιτίας της συνέχεια:

$\frac{d^2 f}{dx\,dy} = \frac{d^2 f}{dy\,dx} \Rightarrow \frac{dM}{dy} = \frac{dN}{dx}$ και όμοια για τις υπόλοιπες

Το αντίστροφο χρειάζεται το θεώρημα Stokes. Δηλαδή

$$\oint \vec{F}\cdot d\vec{r} = \iint_S \vec{\nabla}\times\vec{F}\,\hat{n}\,d\sigma,$$ $\hat{n}$: μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στην επιφάνειας

και την ταυτότητα $\vec{\nabla}\times\vec{\nabla} f = 0$

Παρατήρηση: Στην ουσία πρέπει να βρούμε αν $\exists$ μια συνάρτηση f τέτοια ώστε:

$\frac{df}{dx} = M$, $\frac{df}{dy} = N$, $\frac{df}{dz} = P$

Παράδειγμα: Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$\int_{(1,1,1)}^{(2,3,-1)} (y\,dx + x\,dy + 4\,dz)$$

Λύση:

Θεωρούμε $\vec{F} = y\hat{i} + x\hat{j} + 4\hat{k} = M\hat{i} + N\hat{j} + P\hat{k}$

$\frac{dM}{dy} = \frac{dN}{dx} \Rightarrow 1 = 1$, $\frac{dM}{dz} = \frac{dP}{dx} = 0$

$\frac{dN}{dz} = \frac{dP}{dy} = 0$ άρα υπάρχει $f: \vec{F} = \vec{\nabla} f$

$$\frac{df}{dx} = M \Rightarrow \frac{df}{dx} = y \Rightarrow f = xy + g(y,z)$$

$$\frac{df}{dy} = x + \frac{dg}{dy} = x \Rightarrow g = g(z)$$

$$\frac{df}{dz} = 4 \Rightarrow \frac{dg}{dz} = 4 \Rightarrow g = 4z + c$$

Τελικά : $f = xy + 4z + c$

$$\int_{(1,1,1)}^{(2,3,-1)} (y\,dx + x\,dy + 4\,dz) = f(2,3,-1) - f(1,1,1) =$$
$$= (2 \cdot 3 - 4 + c) - (1 + 4 + c) = -3$$

<u>Παράδειγμα</u>: Να δείξετε ότι το $\vec{F} = (2x-3)\hat{i} - z\hat{j} + \cos z\hat{k}$ δεν είναι συντηρητικό

<u>Λύση</u>:

$$\frac{dM}{dy} = 0, \quad \frac{dN}{dx} = 0$$
$$\frac{dM}{dz} = 0, \quad \frac{dP}{dx} = 0$$

όμως $\frac{dN}{dz} = -1 \neq \frac{dP}{dy} = 0$

Πράγματι ακόμα και αν θεωρήσουμε ότι η f υπάρχει : $\frac{df}{dx} = M \Rightarrow \frac{df}{dx} = 2x - 3 \Rightarrow f = x^2 - 3x + g(y,z)$

$$\frac{df}{dy} = N = -z \Rightarrow \frac{dg}{dy} = -z \Rightarrow g = -yz + h(z)$$

$$\frac{df}{dz} = P = \cos z \Rightarrow -y + h' = \cos z \Rightarrow -y = \cos z \cdot h'$$

<u>αδύνατο</u>